

Модел. и анализ информ. систем. Т. 19, № 3 (2012) 73–81
 ©Кащенко Д. С., 2012

УДК 517.9

Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений

Кащенко Д. С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@mail.ru

получена 20 апреля 2012

Ключевые слова: отображения, бифуркация, цикл, хаос

Исследована динамика одномерного кусочно-линейного отображения с одним разрывом. В пространстве параметров выделены области, соответствующие различным динамическим эффектам.

В работе [1] (см. также [2]) построена общая теория непрерывных одномерных отображений. Установлен универсальный порядок (который называют порядком Шарковского) бифуркаций при изменении параметров отображений. Для приложений важным классом являются кусочно-линейные системы. Как оказалось, они имеют свои бифуркационные особенности.

В настоящей работе рассматривается вопрос о динамике простейших унимодальных кусочно-линейных разрывных отображений $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} f_1(x) = lx + a, & x \in [0, b], \\ f_2(x) = px - p, & x \in (b, 1). \end{cases} \quad (1)$$

Параметр ε , определяющий величину разрыва, удовлетворяет соотношению $-1 < \varepsilon < 1$. Числа a и b определяются через l, p по формулам:

$$a = \begin{cases} 1 - l(1 + \frac{1-\varepsilon}{p}), & \varepsilon \geq 0, \\ 1 - l(1 + \frac{1}{p}), & \varepsilon < 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} 1 + \frac{1-\varepsilon}{p}, & \varepsilon \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{p}, & \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Параметры l, p предполагаются принадлежащими области

$$\Pi = \{(l, p) : l \in [0, 1], p \in (-\infty, -1)\}. \quad (3)$$

На рис. 1а приведены графики функции f_{ε} при $\varepsilon > 0$, а на рис. 1б – при $\varepsilon < 0$.

Анализ непрерывных (при $\varepsilon = 0$) кусочно-линейных отображений приведен в работах [3–4]. Основной результат состоит в том, что если зафиксировать некоторое значение параметра $l \in (0, 1)$ и изменять p от -1 до $-\infty$, то для отображения

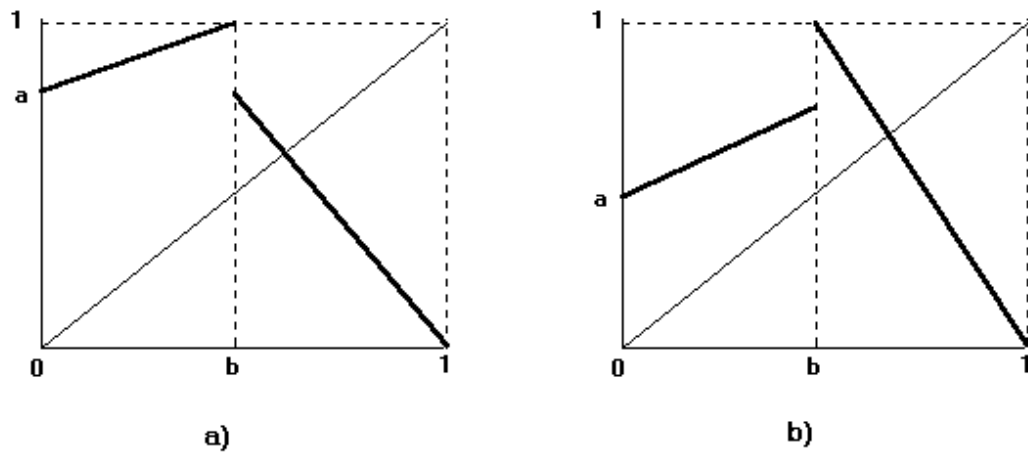


Рис. 1.

будут последовательно наблюдаться устойчивые циклы всех натуральных периодов, разделенные областями хаотичности Γ :

$$2 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 3 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 4 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow 5 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \dots \Rightarrow \Gamma \Rightarrow n \Rightarrow \Gamma \Rightarrow n+1 \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \dots$$

Отметим, что при $l \in (0, \frac{1}{2})$ период цикла растет неограниченно при $p \rightarrow -\infty$. Если же зафиксировать некоторое значение параметра $p \in (-\infty, -1)$ и изменять l от 0 до 1, то для отображения также будут последовательно наблюдаться устойчивые циклы натуральных периодов, однако период будет расти только до некоторого конечного значения, зависящего от p . На рис. 2 представлены области существования и устойчивости циклов отображения в плоскости параметров l и $\log_2(-p)$.

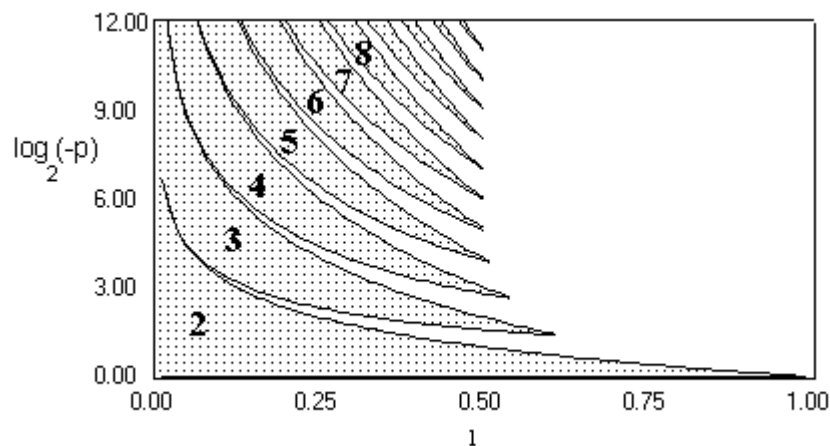


Рис. 2.

Как оказалось, наличие разрыва вносит существенные особенности в бифуркационный анализ, причем бифуркации в случаях 1a и 1b являются существенно различными. Ряд результатов приведен в работах [6–7].

Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

1. Случай $\varepsilon > 0$ Для отображения f_ε получим условия существования и устойчивости циклов $\{x_1, \dots, x_n\}$ $n = 2, 3, \dots$ периода n , таких что

$$x_i < x_{i+1}, f(x_i) = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, f(x_n) = x_1. \quad (4)$$

Будем обозначать циклы такого типа γ_n . Отметим, что речь идет о таких циклах периода n , у которых $n-1$ последовательных значений монотонно возрастает. По-видимому, другого типа циклов в рассматриваемом случае не существует.

Положим

$$L_n = 1 + l + l^2 + \dots + l^n = \frac{1 - l^{n+1}}{1 - l}.$$

Утверждение 1. Цикл γ_n существует тогда и только тогда, когда

$$-\varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon) \frac{L_{n-1}}{l^{n-1}} \leq p \leq -(1 - \varepsilon) \frac{L_{n-2}}{l^{n-2}}, \quad (5)$$

и является притягивающим тогда и только тогда, когда

$$p > -\frac{1}{l^{n-1}}. \quad (6)$$

Докажем сначала неравенства (5). Для существования цикла γ_n , удовлетворяющего (4), во-первых, $(n-2)$ -е итерации точки $x = 0$ должны не превосходить значение $y = b$. Это означает, что должно выполняться неравенство

$$l(\dots l(\underbrace{la + a}_{n-2}) \dots) + a \leq b. \quad (7)$$

Во-вторых, должно иметь место неравенство $m > 1 - \varepsilon$, где $m \in [0, b]$ определяется из условия: $(n-1)$ -я итерация точки m равна b , т.е.

$$\underbrace{l(\dots l(lm + a) + a) \dots}_{n-1} + a = b.$$

Доказательство (6) следует из того, что для устойчивости цикла γ_n необходимо и достаточно, чтобы мультипликатор цикла (произведение производных функции $f_\varepsilon(x)$ в точках цикла) не превосходил по модулю 1.

В плоскости параметров рассмотрим области существования и устойчивости цикла γ_n :

$$\Pi_n = \{(l, p) : \max\{-\frac{1}{l^{n-1}}, -\varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon) \frac{L_{n-1}}{l^{n-1}}\} \leq p \leq -(1 - \varepsilon) \frac{L_{n-2}}{l^{n-2}}\}. \quad (8)$$

Верхняя граница каждой из областей Π_n образована кривой "существования", обозначим ее $E_n(l)$, нижняя – определяется "кривой устойчивости", обозначим ее $S_n(l)$ и "кривой несуществования", обозначим ее $Q_n(l)$. Кривые пересекаются в точке

$O_n = (l_n, p_n)$, $n = 2, 3, \dots$, где $l = l_n$ – принадлежащий интервалу $(\frac{1}{2-\varepsilon}, 1)$ корень алгебраического уравнения

$$l(1-\varepsilon)L_{n-2} \quad \left((1-\varepsilon)l^n - (2-\varepsilon)l + 1 = 0 \right),$$

вторая координата точки O_n определяется как $p_n = -l_n^{-(n-1)}$. Точки O_n лежат на гиперболе

$$p = (1-\varepsilon) \frac{l_n}{1 - (2-\varepsilon)l_n}$$

и обладают асимптотическим свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \frac{1}{2-\varepsilon}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = -\infty.$$

Заметим, что кривые $E_n(l)$, $S_n(l)$, $Q_n(l)$ лежат выше соответственно $E_{n+1}(l)$, $S_{n+1}(l)$, $Q_{n+1}(l)$.

Основное отличие от непрерывного (при $\varepsilon = 0$) случая заключается в том, что при $\varepsilon > 0$ области Π_n могут перекрываться, следовательно, могут существовать одновременно два устойчивых цикла. Условием для этого является выполнение неравенств:

$$E_{n+1}(l) > Q_n(l) \quad \text{и} \quad E_{n+1}(l) > S_n(l).$$

Первое из них выполняется при любых значениях l, n, ε , а второе – при

$$1 > (1-\varepsilon)L_{n-1}. \quad (9)$$

Учитывая, что $L_{n-1} < L_n$ для любых l, n , и переходя к пределу в (9) по n , получаем следующий результат:

Утверждение 2. При $l < \varepsilon$ в плоскости параметров l, p существует бесконечно много областей устойчивости одновременно двух циклов, причем периоды этих циклов отличаются на 1.

Покажем, что не существует областей, в которых существовали и были устойчивыми одновременно три и более циклов. Для того, чтобы существовали три цикла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$E_{n+2}(l) > Q_n(l) \quad \text{и} \quad E_{n+2}(l) > S_n(l). \quad (10)$$

Используя формулы (5) и (6), получаем неравенства, эквивалентные (10):

$$(1-\varepsilon)L_n l^{-1} < 1 < (1-\varepsilon)L_n,$$

которые являются противоречивыми в области (3).

На рис. 3 представлены области существования и устойчивости циклов отображения f_ε в плоскости параметров l и $\log_2(-p)$ при $\varepsilon = 0.5$.

Таким образом, наличие разрыва, указанного на рис. 1а, приводит, в частности, к появлению следующей закономерности при изменении параметра p от -1 до $-\infty$ при $l < \varepsilon$:

$$2 \Rightarrow 2, 3 \Rightarrow 3 \Rightarrow 3, 4 \Rightarrow 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow n \Rightarrow n, n+1 \Rightarrow n+1 \Rightarrow \dots$$

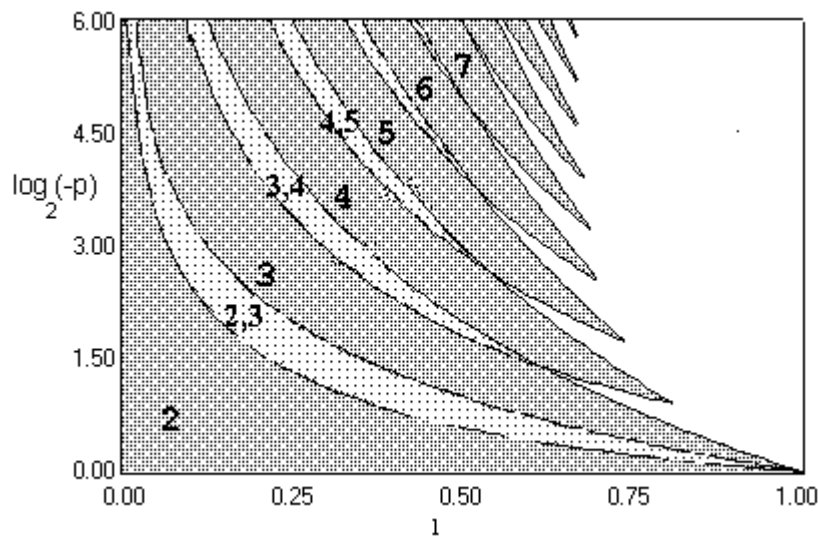


Рис. 3.

Еще раз подчеркнем, что в рассматриваемом случае (как и в [3]) обнаружены только циклы типа γ_n .

2. Случай $\varepsilon < 0$. Данный случай является более сложным, поскольку аналитических результатов получить практически не удастся. Поэтому большее внимание здесь уделено численным методам исследования.

Отметим, что при $p < \varepsilon^{-1}$ отображение имеет глобально устойчивое состояние равновесия.

Утверждение 3. При $\varepsilon < -0.25$ отображение не имеет циклов типа γ_n . При $-0.25 \leq \varepsilon < 0$ циклы γ_n существуют при выполнении неравенств

$$\max\{\varepsilon^{-1}, (1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})(2\varepsilon)^{-1}\} \leq p \leq \min\{-1, (1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon})(2\varepsilon)^{-1}\} \quad (11)$$

и

$$p \leq \frac{L_{n-2}}{-l^{n-2} + \varepsilon L_{n-3}}. \quad (12)$$

Докажем сначала (11). Для существования цикла γ_n необходимо, чтобы параметр p принадлежал интервалу $(\varepsilon^{-1}, -1)$ и выполнялось условие $f_2(1 + \varepsilon) > b$. А неравенство (12) есть следствие неравенства (7).

На рис. 4 приведены области существования и устойчивости циклов периодов от 1 до 4 при $\varepsilon = -0.2$.

Отметим, что циклы периода 4 могут быть разной структуры: фазовые портреты циклов из области $\{4a\}$ и $\{4b\}$ (рис. 4) приведены соответственно на рисунках 5a и 5b.

Обозначим через $\lambda(x)$ определенную на отрезке $[0, 1]$ функцию, которая указывает наименьший период цикла, к которому сходится итерационный процесс $y_{n+1} = f_\varepsilon(y_n)$ при $y_0 = x$. Тем самым, $\lambda(x)$ определяет область притяжения соответствующего цикла. В отличие от случая $\varepsilon > 0$, здесь поведение $\lambda(x)$ может быть нерегулярным: неограниченно нарастает степень осцилляции при стремлении x к некоторому

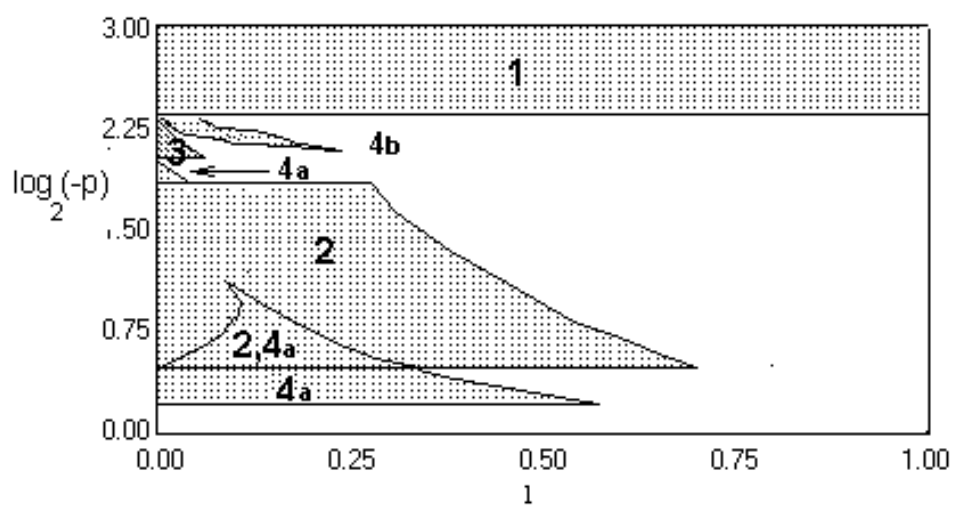


Рис. 4.

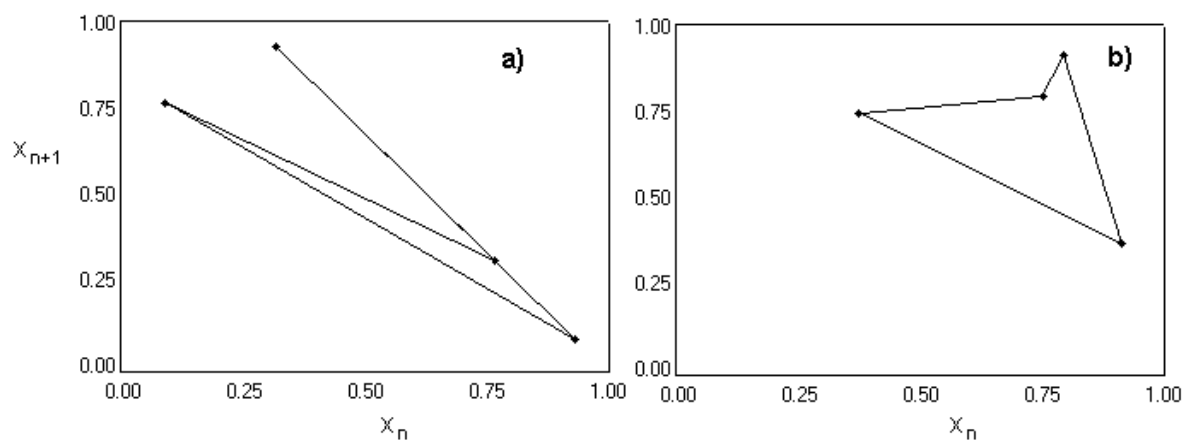


Рис. 5.

x_0 . На рис. 6 показано расположение областей притяжения циклов периода 2 и 4 (l и p принадлежат области $\{2, 4a\}$).

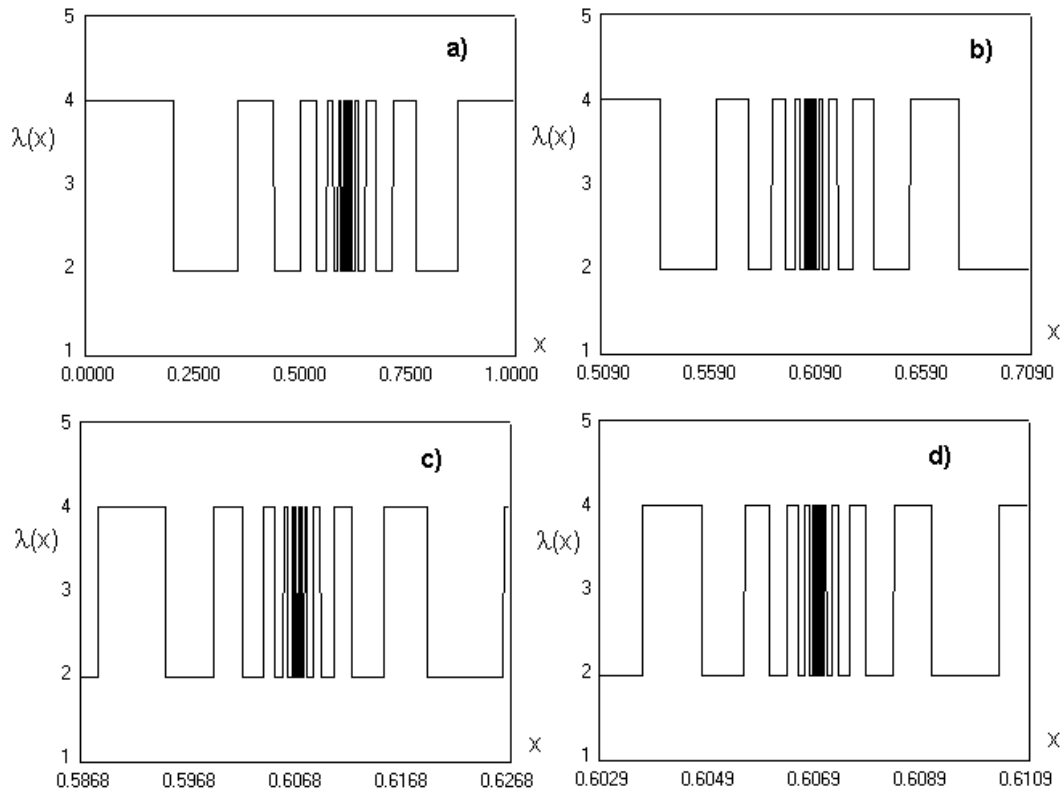


Рис. 6.

Общей закономерности бифуркаций выявить не удалось, однако численными методами установлено, что одновременно может существовать только хаос, только один цикл, 2 цикла, периоды которых отличаются на 2. При приближении p к -1 при малых значениях l растет период циклов. На рис. 7 приведены диаграммы, показывающие зависимость периода цикла от $\log_2(-p)$ при трех различных фиксированных значениях l (при $\varepsilon = -0.2$).

На рис. 8 изображены различные виды аттракторов: хаотический (см. рис. 8a) и интервальный цикл периода 4 (рис. 8b).

Список литературы

1. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. №1. С. 61—71.
2. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981.

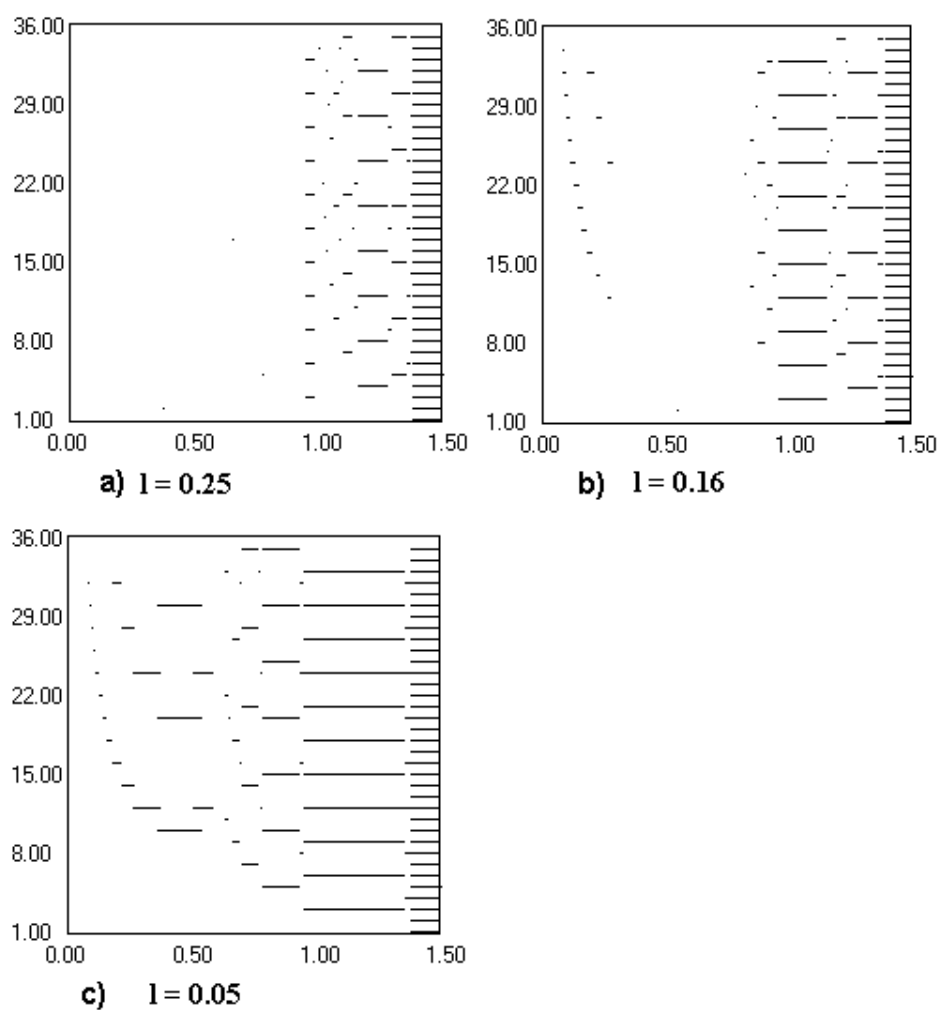


Рис. 7.

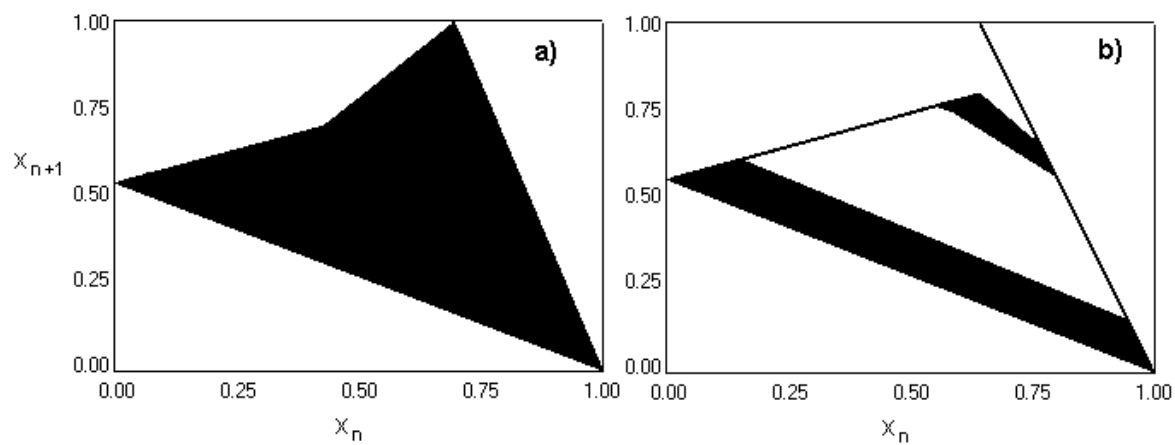


Рис. 8.

3. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М. Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки // Радиотехника и электроника. 1994. Вып. 8—9. С. 1367—1380.
4. Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O. Cycles of Chaotic Intervals in a Time-Delayed Chua's Circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557—1572.
5. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, №2. С. 336—343.
6. Kaschenko D.S. Dynamics of the simplest piecewise linear discontinuous mappings // NDES'97 (Nonlinear dynamics of Electronic Systems) June 26—27, 1997, Moscow, Russia. P. 458—463.
7. Kaschenko D.S. Dynamics of piecewise linear discontinuous mapping // Proceedings International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98), Crans-Montana, Switzerland, 14—17 September, 1998. P. 959—962.

Dynamics of the Simplest Piecewise Linear Discontinuous Mappings

Kaschenko D. S.

Keywords: mappings, bifurcation, cycle, chaos

The dynamics of one-dimensional piecewise linear mapping with one rupture is investigated. In the space of parameters we defined regions with different dynamical effects.

Сведения об авторе:

Кащенко Дмитрий Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент